1997　東大数学　文系第4問 ①

直線ABの方程式は、

$$y-(-2t)=\frac{-2-(-2t)}{\dfrac{2(t^2+t+1)}{3(t+1)}-\dfrac{2}{3}t}\left\{x-\left(\frac{2}{3}t\right)\right\}$$

⇔ …… (頑張る)

⇔ $y=3(t^2-1)x-2t^3$ ・・・(※)

解法1

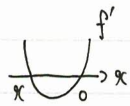
解の配置で解く。
(※)を t の方程式とみなし、$0\leqq t\leqq 1$ に解を持つ条件を求める。

大方針

(※) ⇔ $f(t)=2t^3-3xt^2+3x+y=0$ とおく。

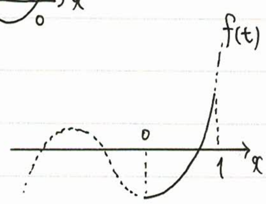
$f'(t)=6t^2-6xt$
$\quad=6t(t-x)$

(i) $x<0$ のとき



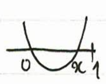
増減表は

t	0	…	1
$f'(t)$		+	
$f(t)$	$f(0)$	↗	$f(1)$



よって、$0\leqq t\leqq 1$ に解を持つためには、
$f(0)\leqq 0$ かつ $f(1)\geqq 0$　(i)の結論

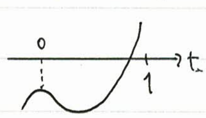
(ii) $0\leqq x<1$ のとき。



増減表は、

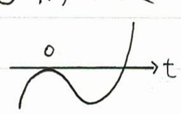
t	0		x		1
$f'(t)$	0	−	0	+	
$f(t)$	$f(0)$	↘	$f(x)$	↗	$f(1)$

① $f(0)<0$ のとき



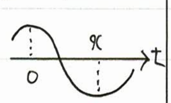
$f(1)\geqq 0$ となればよい。

② $f(0)=0$ のとき



$t=0$ に解を持つ

③ $f(0)>0$ のとき



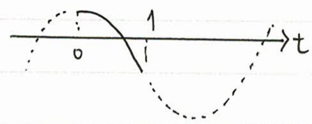
$f(x)\leqq 0$ となればよい。

よって、$0\leqq x<1$ のとき、「$f(0)<0$ かつ $f(1)\geqq 0$」
または
「$f(0)=0$」
または
「$f(0)>0$ かつ $f(x)\leqq 0$」
が $0\leqq t\leqq 1$ に解を持つ条件である。　(ii)の結論

(iii) $1\leqq x$ のとき。

増減表は、

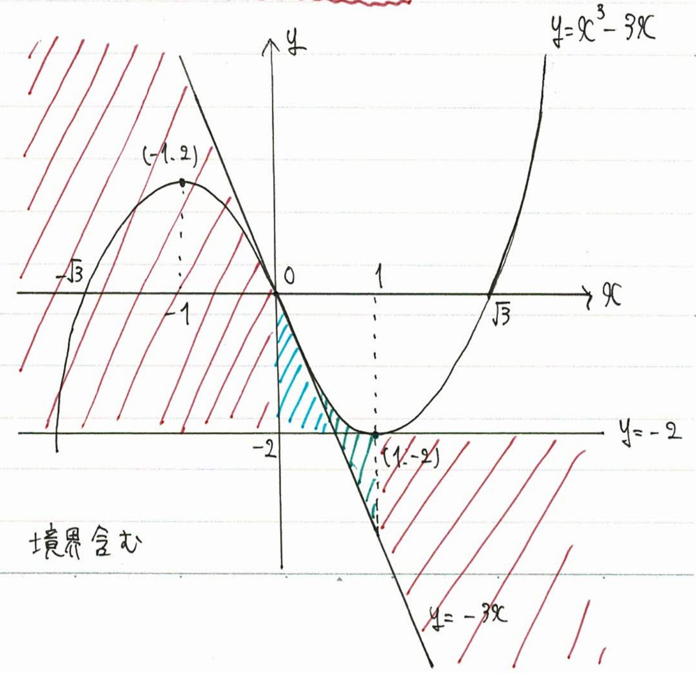
t	0	…	1
$f'(t)$		−	
$f(t)$	$f(0)$	↘	$f(1)$



$0\leqq t\leqq 1$ に解を持つ条件は、$f(0)\geqq 0$ かつ $f(1)\leqq 0$
(iii)の結論

ここで、$f(0)=y+3x$　$f(1)=y+2$　$f(x)=y-x^3+3x$
なので、$0\leqq t\leqq 1$ に解を持つ条件をまとめると、

$x<0$ のとき　$-2\leqq y\leqq -3x$
$0\leqq x<1$ のとき　$-2\leqq y<-3x$
　または　$y=-3x$
　または　$-3x<y\leqq x^3-3x$
$1\leqq x$ のとき　$-3x\leqq y\leqq -2$



境界含む

1997年　東大数学　文系第4問 ②

解法2

大方針

ファクシミリ論法（すだれ法）で解く。
(*)で、xを固定させ、$y=$(tの関数)とみなし、yのとりうる値の範囲（最小値や最大値）を求める。

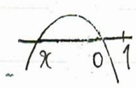
(*)で、xを固定し、tの降べきの順で並べると、

(*) $\iff$ $y = -2t^3 + 3xt^2 - 3x$ $= g(t)$ とおく。

$y=g(t)$ の最大値や最小値を求めるために、グラフを描く。

$g'(t) = -6t^2 + 6xt$
$= -6t(t-x)$

(i) $x<0$ のとき。



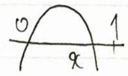
増減表は

t	0	…	1
$g'(t)$		−	
$g(t)$	$g(0)$	↘	$g(1)$

よって $g(1) \leqq y \leqq g(0)$

(i)の結論

(ii) $0 \leqq x < 1$ のとき



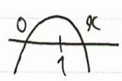
増減表は

t	0		x		1
$g'(t)$	0	+	0	−	
$g(t)$	$g(0)$	↗	$g(x)$	↘	$g(1)$

よって、yの最小値は $g(0)$ と $g(1)$ の小さい方。
yの最大値は $g(x)$

∴ ($g(0)$ と $g(1)$ の小さい方) $\leqq y \leqq g(x)$

(iii) $1 \leqq x$ のとき。



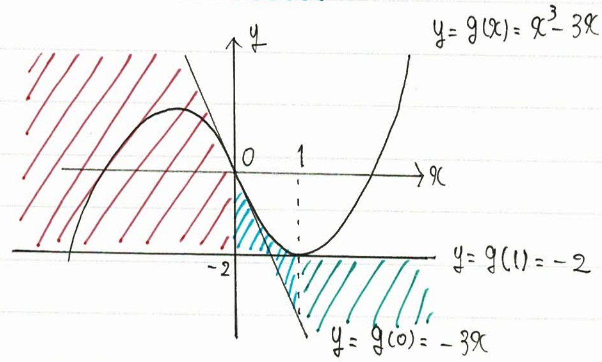
増減表は。

t	0	…	1
$g'(t)$	0	+	
$g(t)$	$g(0)$	↗	$g(1)$

よって、
$g(0) \leqq y \leqq g(1)$

$\begin{cases} g(0) = -3x \\ g(1) = -2 \\ g(x) = x^3 - 3x \end{cases}$ なので、

$x<0$ のとき、 $-2 \leqq y \leqq -3x$
$0 \leqq x < 1$ のとき、 ($-3x$ と -2 の小さい方) $\leqq y \leqq x^3 - 3x$
$1 \leqq x$ のとき、 $-3x \leqq y \leqq -2$



解法3

包絡線で解く。
(*)を tの降べきの順で並べ、$h(t)=0$ とし、
$h(t)=0$ かつ $h'(t)=0$ を解くと、(*)が接する曲線が、
$h'(t)=0$ から、その曲線との接点が得られる。
$0 \leqq t \leqq 1$ で接線を動かす。

大方針

(*) $\iff$ $2t^3 - 3xt^2 + 3x + y = 0$
$h(t) = 2t^3 - 3xt^2 + 3x + y$ とおく　ちなみに、$f(x)$と等しい

・$h'(t) = 6t^2 - 6xt = 0$ を解くと、
$6t(t-x) = 0$　$t = 0,\ x$.
$x = t$ ◀ 接点
$0 \leqq t \leqq 1$ より $0 \leqq x \leqq 1$.

・$x=t$ を $h(t)$ に代入し、
$2x^3 - 3x \cdot x^2 + 3x + y = 0$　∴ $y = x^3 - 3x$　◀ 接する曲線。

よって、(*) $\iff$ $y = 3(t^2-1)x - 2t^3$ は、
接点のx座標がxで $y=x^3-3x$ に $0 \leqq x \leqq 1$ で常に接する直線である。